# Curso de Nivelación en Matemática

2
0
2
4

Para las carreras:

- ✓ Licenciatura en Saneamiento Ambiental
- ✓ Tecnicatura en Higiene y Seguridad

Autora: Prof. Dello Russo María Laura

# ¡Bienvenidos!

Estos apuntes han sido pensados para ayudarte a recuperar y consolidar los conocimientos matemáticos que seguramente adquiriste en el nivel medio, y que son la base para afianzar otros más complejos relacionados con la profesión que elegiste.
Para que podamos alcanzar este propósito es necesario que emprendas esta nueva etapa con responsabilidad y compromiso, sabiendo que nada es posible sin esfuerzo y que nada es tan difícil, incomprensible o inalcanzable como parece, sólo se necesita constancia, paciencia y horas de estudio.

Se sugiere la lectura de este cuadernillo previa a los encuentros de este curso, ya que un profesor hará sólo un breve repaso de los conceptos del tema a tratar, se desarrollarán algunos ejemplos, y habrá espacio para consultar las dudas que hayas tenido en la resolución de los problemas. De ser necesario, el profesor desarrollará algún ejercicio adicional en la pizarra

Son objetivos de este curso que te habitúes a los tiempos disponibles en la Universidad para estudiar un tema, que siempre son breves, y que fortalezcas tu capacidad de resolver problemas de la manera más conveniente y en el menor tiempo posible, por lo que esperamos que aproveches los horarios de clase para completar aquellos ejercicios en que hayas tenido inconvenientes y verifiques los resultados que obtuviste, y no para comenzar a resolverlos recién en la clase.

Cada persona tiene una modalidad de estudio, de trabajo. Sin embargo te recomendamos que sigas el orden en que están presentados los temas y que trates de resolver la guía de ejercicios de cada uno de ellos. Es posible que aparezcan dificultades, no te desanimes y volvé a intentarlo. Si aún no llegás a la solución, anotá las dudas y buscá ayuda, un profesor o un compañero pueden brindártela. Seguí adelante, todo es posible, sólo hay que intentarlo.

# Números Reales

En distintas partes del mundo y en diferentes épocas, los seres humanos crearon diversos tipos de números, cuyos usos fueron ampliando a medida que se complejizaron las actividades de las personas. Con el devenir de los avances científicos, los matemáticos clasificaron los números y los organizaron formalmente en conjuntos, que aún hoy siguen investigando. Uno de estos conjuntos numéricos es el de los ***números reales***.

Los números reales se conforman con la unión de dos conjuntos: El conjunto de los números racionales (aquellos que pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros) y el conjunto de los números irracionales (aquellos que no pueden se expresados como el cociente entre dos números enteros y tienen infinitas cifras decimales no periódicas).

Es objetivo de este curso hacer un repaso de estos conjuntos numéricos, sus operaciones y propiedades.

# De los Naturales a los Reales (Un breve repaso)

## El Conjunto de los Números Naturales [$\mathbb{N}$]:

Los números naturales son los números que se utilizan para contar. Se considera que el cero no pertenece a este conjunto, pues empezamos a contar desde el 1. Queda marcado acá que el 1 es el primer elemento de este conjunto, ¿Podrías escribir el último elemento de este conjunto?..................................................................................................................................................................

Luego: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5, \dots \dots\}$

Actividad 1: Resuelve los cálculos entre números naturales que aparecen en la tabla e indica cuáles tienen resultado natural (si) y cuáles no (no).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3-5+2=0$ | NO | $10-4-8=$ | |
| $8+1-6=3$ | SÍ | $10+4-8=$ | |
| $15+2+30=$ | | $4-10-8=$ | |
| $9-11-6=$ | | $8-10+4=$ | |

Observemos que cuando sumamos dos naturales, obtenemos siempre un número natural, pero no sucede así con la resta, es decir, no siempre que restemos dos naturales obtenemos un natural. Se hace necesario así, definir un nuevo conjunto numérico.

## El conjunto de los Números Enteros [$\mathbb{Z}$]:

Cada número entero puede pensarse como la resta de dos naturales; o sea, si a un número natural se le resta otro natural, siempre se obtiene un entero.

Ejemplos:

7 – 3 = 4.     2 – 8 = -6.   12 – 12 = 0.

Luego el conjunto de los enteros está formado por: Los números naturales, sus opuestos y el cero. Es decir: $\mathbb{Z} = \{\dots. -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots..\}$

Actividad 2:

1. Trabajen con la definición:

a. Expresen los números enteros -5, 3, 0, 18, -25 como diferencia de dos números naturales.

b. ¿Son verdaderas o falsas cada una de estas afirmaciones?

- Todo número natural puede expresarse como la diferencia de dos números enteros.
- Todo número entero puede expresarse como la diferencia de dos números naturales.
- Existen números naturales negativos.
- Todos los números enteros son negativos.
- El cero en un número entero.
- El cero no es un número natural.

2. Resuelve:

a. $-3.(-4).5 =$

b. $-3.4.(-5) =$

c. $3.(-4).5 =$

d. $-3.(-4).(-5) =$

e. $-10:2+(-1).4-3.0 =$

f. $\frac{-4.0.500}{100.2} =$

g. $\frac{6.(-3).(-1)}{-2.9} =$

h. $\frac{-5.(-8)}{-4.5}.(-2) =$

i. $2^4-5^2+(-3)^3-(-2+1)^5 =$

j. $(-24:4)^2+(-10)^3 =$

3. Los siguientes cálculos están resueltos de modos diferentes y se obtuvieron dos resultados distintos; esto es un absurdo. Lo que ocurre es que uno está hecho de manera correcta y en el otro no se respetan la separación en términos ni otras propiedades de las operaciones. Indiquen cuáles son los cálculos correctos.

$a_1)\ 8+5.(-3)=13.(-3)=-39$

$a_2)\ 8+5.(-3)=8-15=-7$

$b_1)\ (7+4)^2=11^2=121$

$b_2)\ (7+4)^2=7^2+4^2=49+16=65$

$c_1)\ 5-(-2)^2+(-3)^2=5+4-9=0$

$c_2)\ 5-(-2)^2+(-3)^2=5-4+9=10$

$d_1)\ 16:2+7.3=8+21=29$

$d_2)\ 16:2+7.3=15.3=45$

4. Calculen y expresen el resultado como una potencia:

a. $11^3.11^6.11^{-5} =$ c. $\left[\frac{9^5.(-2)^3.(-2)^4}{9^2}\right]^2 =$ e. $[(-2)^2]^3 =$ g. $(5^0)^3 =$

b. $\frac{7.3^5.7^4}{7^2.3^3} =$ d. $\frac{5.4^0.5^7.4^3}{5^8.4} =$ f. $(3^2)^5 =$ h. $\frac{3^2.2^2}{2^2.5} =$

¿Todos los resultados de estos ejercicios son números enteros?

"Cuando se dividen dos números enteros, no siempre se obtiene un número entero", nuevamente nos encontramos frente a la necesidad de definir otro conjunto numérico.

## El conjunto de los números racionales [$\mathbb{Q}$]

Los números racionales aparecen muy temprano en la historia de la humanidad. Fueron creados por los antiguos egipcios y los habitantes de Mesopotamia asiática, hace 5000 años o más, pues obviamente las fracciones eran necesarias para dividir tanto las tierras como los alimentos; aunque no conocían a todos los racionales, sino sólo a los positivos.

En el presente los números racionales son definidos como aquellos que pueden obtenerse de un cociente entre dos números enteros, siendo el divisor distinto de cero.

En símbolos:

$$\mathrm{a} \in \mathbb{Z},\ \mathrm{b} \in \mathbb{Z} \text{ y } \mathrm{b} \neq 0 \rightarrow \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \in \mathbb{Q}$$

¿Por qué crees que se excluye al cero del denominador?………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………

Ejemplos:

$\frac{-7}{1} = -7$; $\frac{10}{2} = 5$; $\frac{-2}{12} = -\frac{9}{4}$; $\frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$; $\frac{0}{3} = 0$; $\frac{1}{-1} = -1$

Hay dos maneras posibles de escribir un número racional: como fracción y como expresión decimal. Si retomamos algunos ejemplos dados tenemos que:

$\frac{-27}{12} = -\frac{9}{4} = -2{,}25$;

$\frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} = 1,\hat{3}$

Usando la definición podemos justificar si algunos números son racionales o no:

$\frac{7}{3}$ Es racional pues es la división entre el entero 7 y el entero 3.

4 Es racional pues es la división entre el entero 4 y el entero 1.

$\frac{10}{-5}$ Es racional pues es la división entre el entero 10 y el entero -5.

0,3 Es la expresión decimal de un número racional pues es la división entre el entero 3 y el entero 10.

$0,\hat{5} = 0,55555555 \dots \dots$ Es la expresión decimal de un número racional pues es la división entre el entero 5 y el entero 9.

$0,1\hat{5} = 0,155555555 \dots \dots$ Es la expresión decimal de un número racional pues es la división entre el entero 14 y el entero 90.

Los últimos tres ejemplos muestran los tres deferentes tipos de expresiones decimales que puede tener un número racional.

1. Expresión decimal finita: 0,3; -0,17; 12,000742.

2. Expresión decimal periódica pura: $0,\hat{5}$; $0,\widehat{52}$; $1,\widehat{689}$.

3. Expresión decimal periódica mixta: $0,2\hat{5}$; $0,12\widehat{52}$; $1,12\widehat{689}$.

Para escribir un número decimal como fracción se usan algunas reglas prácticas:

- Si la expresión es decimal finita, entonces se escribe el número entero sin la coma, dividido un 1 y tantos ceros como cantidad de números decimales haya.
- Si la expresión es  decimal periódica se puede seguir el siguiente razonamiento:

Supongamos que queremos escribir al decimal $0,\hat{5}$ como fracción, lo llamaremos $x$.

Entonces, $x = 0,\hat{5}$.

Si multiplico a x por 10, de forma de correr la coma un lugar me queda que: $10x = 5,\hat{5}$

Luego restamos $10\mathrm{x} - \mathrm{x} = 5,\hat{5} - 0,\hat{5}$

$$9\mathrm{x} = 5.$$

$$\mathrm{x} = \frac{5}{9}$$

Podemos verificar que $\frac{5}{9} = 0,\hat{5}$

Otro ejemplo: Supongamos que queremos escribir al decimal $0{,}1\hat{5}$ como fracción, lo primero que hacemos es llamarlo $x$.

Entonces, $x = 0{,}1\hat{5}$.

Si multiplico a $x$ por 10, de forma de correr la coma un lugar me queda que: $10x = 1,\hat{5}$.

Luego multiplico a $x$ por 100, obteniendo que: $100\mathrm{x} = 15,\hat{5}$

Luego restamos $100\mathrm{x} - 10\mathrm{x} = 15,\hat{5} - 1,\hat{5}$

$$90\mathrm{x} = 14.$$

$$\mathrm{x} = \frac{14}{90}$$

Podemos verificar que $\frac{14}{90} = 0{,}1\hat{5}$.

Este mecanismo se traduce en la siguiente regla práctica:

$$\frac{(\text{Todas las cifras de la expresión}) - (\text{las cifras no periódicas de la expresión})}{\text{Tantos 9 como cifras decimales periódicas y tantos 0 como cifras decimales no periódicas}}$$

Ejemplos:

**a)** $2,\hat{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$ **b)** $-15,\hat{2} = -\frac{152-15}{9} = -\frac{137}{9}$ **c)** $4,\widehat{12} = \frac{412-4}{99} = \frac{408}{99} = \frac{136}{33}$

**d)** $0,0\hat{5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ **e)** $-0,4\hat{6} = -\frac{46-4}{90} = -\frac{42}{90} = -\frac{7}{15}$ **f)** $3,21\hat{5} = \frac{3.215-321}{900} = \frac{2.894}{900} = \frac{1.447}{450}$

Actividad 3: Operaciones con números racionales.

1. Resuelvan los siguientes cálculos:

a. $\frac{3}{4}.2-4.\left(-\frac{1}{2}\right)-1{,}8=$

b. $6{,}2-3{,}4:(-2)+\frac{3}{2}=$

c. $(1-0{,}7).0{,}2+1{,}8:2-1=$

d. $\frac{2}{5}:\frac{3}{2}+\frac{1}{3}.\frac{3}{5}-1=$

e. $0{,}7:(-2)+0{,}1.(-0{,}1)+\frac{1}{4}=$

f. $10:\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+2.(-1{,}4+0{,}2)=$

2. Escriban las expresiones decimales como fracción irreducible:

a. $0,\hat{8}=$ b. $3,\widehat{15}=$ c. $2{,}5\hat{2}=$

d. $2,\hat{5}=$ e. $0,\widehat{18}=$ f. $5{,}2\hat{4}=$

3. Resuelvan los siguientes ejercicios combinados:

a. $\left(1{,}3-0,\hat{3}\right):\left(-\frac{1}{6}\right)-0{,}2=$

b. $-0,\hat{2}.\frac{9}{5}+1,\hat{3}:0{,}8\hat{3}=$

c. $\left(1,\hat{5}+0,\hat{1}\right).0{,}6-1{,}0\hat{2}=$

d. $\left(3{,}4\hat{2}.0{,}0\widehat{75}+1,\hat{2}\right).0{,}75=$

4. Calculen las siguientes potencias y raíces.

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$ b. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} =$ c. $0{,}1^2 =$ d. $(-0{,}2)^3 =$

e. $(0{,}3)^4 =$ f. $(-0{,}3)^2 =$ g. $\left(0,\hat{2}\right)^3 =$ h. $\left(-1,\hat{2}\right)^2 =$

i. $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} =$ j. $\sqrt[3]{0{,}000064} =$ k. $\sqrt{\frac{121}{100}} =$ l. $\sqrt{0{,}09} =$

ll. $\sqrt[3]{-0{,}027} =$ m. $\sqrt{0,\hat{4}} =$ n. $\sqrt{1,\hat{7}} =$ ñ. $\sqrt{0{,}69\hat{4}} =$

5. Resuelvan los siguientes cálculos combinados.

a. $\left(0,\hat{3} + \frac{5}{6}\right) : 0,\hat{1} - 5.\sqrt{\frac{81}{16}} =$

b. $2.\sqrt{2,\hat{7}} - 1,\hat{3}^{-1}.\,0{,}0\hat{4} + 2^{-2} =$

c. $\sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right).\,0,\hat{3}} + (0{,}1.7 - 3{,}1).\,0{,}1\hat{6} =$

d. $\sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} + \left(2.0{,}3 + \sqrt{0{,}04}\right)^{-1} - \frac{3}{2} =$

e. $\left(-\frac{9}{7}.\,0,\widehat{25} + \frac{2}{7}\right).\left(0,\hat{6} + 0,\hat{3}^2\right) =$

## Los números irracionales (II)

Actividad 4: Dibujen un cuadrado y una de sus diagonales. Considerando que el lado del cuadrado mide una unidad y, aplicando el teorema de Pitágoras, calculen el valor de la diagonal. ¿Pueden calcularlo con exactitud? ¿Por qué?

El descubrimiento de los irracionales

Los pitagóricos habían supuesto la existencia de una correspondencia uno-uno entre las longitudes de los segmentos de líneas rectas y los números racionales.

Según el teorema de Pitágoras, "en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". De aquí se desprende que, si el triángulo es isósceles, la hipotenusa es inconmensurable, por ejemplo, si los catetos miden 1, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$.

Este segmento es inconmensurable porque "no se puede medir" con los números racionales, ninguna unidad racional, por pequeña que sea, sirve para hacerlo. Es probable que al calcular la diagonal de un cuadrado de lado igual a 1 los griegos se toparan con este número- ni natural ni racional- que tampoco puede expresarse como el cociente de dos números enteros, lo que dio lugar a la denominación de número irracional.

**¿Qué es un número irracional?** Es aquel número que no puede ser expresado como cociente de dos números enteros y su expresión decimal tiene una cantidad infinita de cifras decimales no periódicas.

Ejemplos:

- Todas las raíces de números enteros, no exactas, son irracionales.

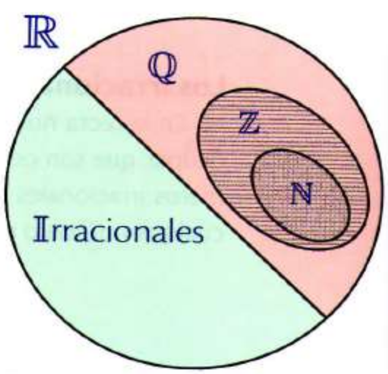
$\sqrt{3} = 1{,}7320508 \ldots \ldots$ $\qquad$ $\sqrt{2} = 1{,}414213562 \ldots \ldots \ldots ..$

$\sqrt[3]{10} = 2{,}15443469 \ldots \ldots \ldots.$

- El número $\pi = 3{,}141592654 \ldots \ldots \ldots.$

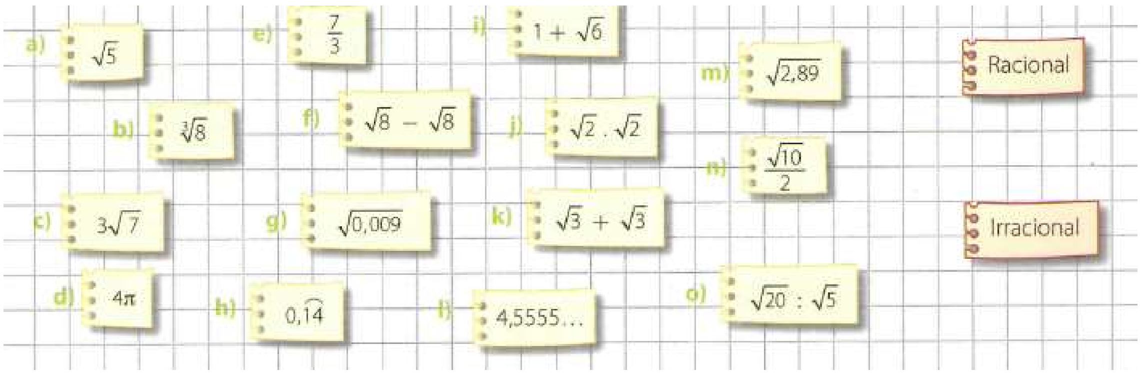
Con este nuevo conjunto numérico, se terminan de formar los números reales.

**Números Reales ($\mathbb{R}$)** Es el conjunto de números formados por los números racionales y los números irracionales.



Actividad 5:

1. Unir según corresponda en cada caso.




2. Ubiquen 3 números irracionales entre estos números:

a. 15 y 15,1. b. 0,5 y 0,51. c. -6,4 y -6,3. d. $\sqrt{2}$ y $\frac{3}{2}$.

3. ¿Las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas? ¿Por qué?

a. $\sqrt{169}$ es un número racional.

b. $\sqrt[3]{125}$ es un número irracional.

c. Los números cuya expresión decimal es periódica, son irracionales.

d. Todo número se puede escribir como el cociente de dos números enteros.

e. Entre dos números irracionales existe algún número irracional.

4. Respondan y justifiquen:

a. ¿Es posible indicar cuántos números racionales existen entre $\frac{1}{2}$ y $1$?

b. ¿Es posible indicar cuántos números racionales existen entre $-1$ y $-\frac{1}{2}$?

c. ¿Cuántos números irracionales se pueden encontrar entre $\frac{1}{2}$ y $1$?

d. ¿Un número irracional puede ser racional?

5. Considerando los conjuntos de números que ya conocemos, existen entre ellos las siguientes relaciones: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; esto significa que los naturales están contenidos en los enteros, éstos en los racionales y el conjunto de los racionales está incluido en los reales.

Completar la siguiente tabla, con si o no, según corresponda:

| Número | 7 | $\sqrt{10}$ | -2,08 | 1,121222..... | $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ | $14,\hat{3}$ | 0 | π | $\sqrt{9}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ¿Natural? | | | | | | | | | |
| ¿Entero? | | | | | | | | | |
| ¿Racional? | | | | | | | | | |
| ¿Irracional? | | | | | | | | | |

6. Indiquen cuál de estas afirmaciones es verdadera y cuál es falsa. Justifiquen.

a. Todo número real es racional.

b. Algunos números naturales son enteros.

c. Todo número entero es un número racional.

d. Todos los números reales son números irracionales.

e. Ningún número real es un número irracional.

**Operaciones con números Reales.**

## Extracción de factores de un Radical

Se pueden extraer factores de un radical si al factorizar su base, el exponente de los mismos es mayor o a los sumo igual que el índice de la raíz. Para ello deben aplicarse las propiedades de la potenciación y radicación.

Ejemplos:

$$\sqrt[2]{27} = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt[2]{3^2.3^1} = \sqrt[3]{3^2}.\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{320} =$$

Actividad 6:

1. Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a. $\sqrt{8} =$ b. $\sqrt[3]{56} =$ c. $\sqrt{180} =$ d. $\sqrt[4]{112 =}$

e. $\sqrt{50} =$ f. $\sqrt{392} =$ g. $\sqrt[3]{192} =$ h. $\sqrt[4]{162} =$

i. $\sqrt{0{,}27} =$

Adición y Sustracción de Radicales

**Definición: Radicales Semejantes**

Dos radicales son semejantes cuando tienen igual índice y el mismo radicando.

Ejemplos de términos con radicales semejantes:

$$5\sqrt[3]{2}; \quad -2\sqrt[3]{2}.$$

**Adición y sustracción de radicales**

Sólo es posible sumar o restar términos que contienen radicales semejantes.

Por ejemplo:

- $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
- $9\sqrt{3} - 5\sqrt{3} =$
- $5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} =$

Existen casos en los cuales ciertos radicandos son semejantes luego de llevarlos a su mínima expresión.

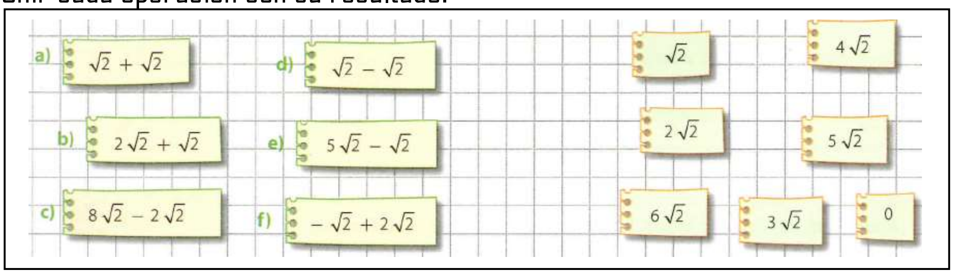
Ejemplos:

- $\sqrt{12} + 5\sqrt{3} =$

- $3\sqrt{2}-5\sqrt{32}+7\sqrt{8}-9\sqrt{50}=$
- $4\sqrt{3}-6\sqrt[4]{25}-8\sqrt{27}+\sqrt{20}=$

Actividad 7:

1. Unir cada operación con su resultado.




2. Resolver las siguientes adiciones y sustracciones.

a. $7\sqrt{3}+\sqrt{3}-5\sqrt{3}=$

b. $4\sqrt{5}+9\sqrt{7}-3\sqrt{5}-6\sqrt{7}=$

c. $-3\sqrt[3]{24}+8\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{375}=$

d. $\sqrt{18}+5\sqrt{2}=$

e. $\sqrt{98}-\sqrt{72}=$

f. $-9\sqrt[4]{162}+2\sqrt[4]{32}=$

g. $2\sqrt{20}-\sqrt{45}+6\sqrt{5}=$

h. $-8\sqrt{28}+3\sqrt{63}+\sqrt{343}=$

3. Hallar el valor de a que verifica que: $\sqrt{8}+a=\sqrt{2}$

## Multiplicación y División de radicales

Multiplicación y división de radicales con el mismo índice

Si los radicales tienen el mismo índice, se multiplican los radicandos entre sí y el índice no se modifica: (Este procedimiento se basa en las propiedades conocidas: $\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$)

- $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$

Otro ejemplo:

- $\sqrt[3]{2.3}.\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^3.3} = 2.\sqrt[3]{3}$
- $\sqrt{8}:\sqrt{2} =$

Multiplicación y división de radicales con diferente índice

Ejemplo:

- $\sqrt[4]{4}.\sqrt[5]{16}$

Primero, se determina el mínimo común múltiplo de los índices. Este será el índice de todos los radicales en la operación. En este caso el mínimo común múltiplo sería 20. Después se divide el mínimo común múltiplo entre el índice de cada radical y se eleva el radical a ese resultado. Luego se opera como en el caso anterior.

$$\sqrt[4]{4}.\sqrt[5]{16} = \sqrt[4.5]{4^5}.\sqrt[5.4]{16^4} = \sqrt[20]{4^5.16^4} = \sqrt[20]{4^5.4^8} = \sqrt[20]{4^{13}}$$

Actividad 8:

1. Resolver las siguientes operaciones combinadas entre radicales.

a. $\sqrt{3}.\left(\sqrt{2}+\sqrt{15}\right)-\sqrt{6} =$

b. $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) =$

c. $\left(\sqrt{40}+\sqrt{90}\right):\sqrt{5} =$

d. $3\sqrt[4]{9}-\sqrt[6]{27}+2\sqrt[8]{81} =$

e. $\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{21}:\sqrt[3]{7} =$

f. $\sqrt{\sqrt{48}}+\sqrt[4]{243}-\sqrt[8]{9} =$

2. Resuelvan las multiplicaciones y divisiones entre radicales.

a. $\sqrt[5]{24}.\sqrt{6} =$

b. $\sqrt{2}.\sqrt[3]{4}.\sqrt[4]{8} =$

c. $\sqrt[3]{4}.\sqrt[5]{8} =$

d. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} =$

e. $\frac{\sqrt[3]{9.2}}{\sqrt[4]{27.2^2}} =$

f. $\sqrt{4}.\sqrt[3]{4}.\sqrt[6]{16} =$

3. Resuelvan las operaciones combinadas entre radicales.

a. $\sqrt[3]{2}.\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}\right)=$

b. $\sqrt[3]{9.}\,\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{32}:\sqrt[3]{2}=$

c. $\sqrt[4]{2.\,3^2.}\,\sqrt[4]{3.5}.\,\sqrt[4]{2.3.5}=$

d. $\sqrt{3}.\left(\sqrt{6}-\sqrt{24}\right)+\sqrt{98}=$

e. $\sqrt[5]{3.\,2^3.}\sqrt{3.2}=$

f. $\sqrt{7}.\,\sqrt[3]{7^2.}\,\sqrt[4]{7^3}=$

g. $\sqrt[3]{11^2.}\,\sqrt[5]{11^3}=$

h. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}=$

# ECUACIONES

Dos mujeres charlando:

"La cuarta parte de mi vida la pasé en una casa de campo, la mitad en un pueblo y los últimos 10 años viviendo en esta ciudad. ¿Cuántos años crees que tengo?"

La otra mujer, tras pensar, responde:

"Cuarenta años"

¿Cómo pudo saberlo?

Como hemos visto, todo problema matemático puede expresarse en lenguaje ordinario o en lenguaje matemático.

Para resolver el problema, la mujer utilizó una igualdad en la que un valor era desconocido. Muchos problemas se resuelven de manera similar, lo que originó el estudio de las ecuaciones.

## ¿Qué son las ecuaciones?

Las ecuaciones son igualdades en las que aparecen números y letras (denominadas incógnitas) relacionados mediante operaciones matemáticas.

Por ejemplo: $y + 2x = 5;\ \ a + b = 8;\ 2^e + 8 = 3$

En particular, cuando el valor desconocido es uno solo, a dicha ecuación la llamamos ecuación con una incógnita. Algunos ejemplos son:

a) $3x+4=5x-8$ b) $2x^2+20=24x-20$ c) $\log x = 3-\log(x+2)$

### Solución de una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar los valores de la incógnita tales que, al ser sustituidos en la ecuación y realizar las operaciones indicadas, hagan que la igualdad sea cierta.

Por ejemplo, dada la ecuación $3x-1=6x-7$, si sustituimos $x$ por el valor 2 en dicha ecuación, tenemos:

$$3.\mathbf{2} - 1 = 6.\mathbf{2} - 7$$

$$6 - 1 = 12 - 7$$

$$5 = 5$$

y la ecuación se ha transformado en una identidad, por lo tanto, 2 es solución de la ecuación.

En cambio si sustituimos $x$ por el valor 3 en la misma ecuación:

$$3.3 - 1 = 6.3 - 7$$

$$9 - 1 = 18 - 7$$

$$8 = 11$$

llegamos a una igualdad que no es cierta. Por lo tanto, 3 no es solución de la ecuación.

El conjunto solución de una ecuación determinada puede:

- Tener un solo elemento: por ej: $2x = 6$. La única solución de esta ecuación es $x = 3$.
- Tener un número finito de elementos: por ej. $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$ tiene como soluciones solamente a $\frac{1}{2}$, -1 y 0.
- No tener elementos: por ej. $x^2 = -4$. En este caso decimos que el conjunto solución es vacío.
- Tener infinitos elementos: por ej. $2x - x = x$, puesto que todo número real es solución de dicha ecuación.

Cuando dos ecuaciones tienen el mismo conjunto solución, decimos que dichas ecuaciones son equivalentes. Por ejemplo, las ecuaciones $4x + 6 = x + 9$ y $x - 2 = -1$ tienen ambas como conjunto solución al 1.

¿Cómo podríamos obtener ecuaciones equivalentes a una dada? Para esto, nos valemos de algunas propiedades básicas de las igualdades:

Si $a$, $b$, $c$ y $d$ son cuatro números reales cualesquiera, entonces valen las propiedades siguientes:

1) **Reflexividad**: $a = a$, es decir, todo número es igual a sí mismo.
2) **Simetría**: $a = b \Rightarrow b = a$, es decir, dados dos números $a$ y $b$, si el primero es igual al segundo, entonces el segundo también es igual al primero.
3) **Transitividad**: $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$, es decir, si un número $a$ es igual a otro $b$, y éste último es igual a un tercer número $c$, entonces el primero es igual al tercero.
4) **Uniformidad con la suma**: $a = b \Rightarrow a + c = b + c$, es decir, si se suma el mismo número a ambos miembros de una igualdad, se obtiene otra igualdad.
5) **Uniformidad con el producto**: $a = b \Rightarrow ac = bc$, es decir, si se multiplican ambos miembros de una igualdad por el mismo número, se obtiene otra igualdad.

Veamos cómo aplicar dichas propiedades en la resolución de algunas ecuaciones sencillas. Por ejemplo:

$$3x + 8 = 9$$

$$3x + 8 + (-8) = 9 + (-8)$$ (por la uniformidad con la suma)

$$3x = 1$$

$$3x.\tfrac{1}{3} = 1.\tfrac{1}{3}$$ (por la uniformidad con el producto)

$$x = \tfrac{1}{3}$$

Es importante verificar que el valor obtenido satisface la ecuación porque un error en los cálculos puede conducirnos a una solución incorrecta.

**Grado de una ecuación**

El grado de una ecuación es el mayor de todos los exponentes a los que está elevada la incógnita. Se dice que son de primer grado cuando el exponente de la incógnita es como mucho 1.

<u>Resolución de ecuaciones de primer grado con una sola incógnita</u>

En la resolución de ecuaciones es común escuchar comentarios como "lo que está restando pasa sumando" o "lo que está multiplicando pasa dividiendo". En realidad, lo que se está haciendo es aplicar las propiedades vistas. En este curso vamos a trabajar usando esas propiedades y justificando todos los pasos realizados. Veamos ciertos casos particulares:

- Sea la ecuación lineal: $2x - 8 = 2(3 + x)$

  Resolución:

  $$2x - 8 = 2(3 + x)$$

  $$2x - 8 = 6 + 2x$$ (por propiedad distributiva)

  $$2x - 8 - 2x = 6 + 2x - 2x$$ (por propiedad uniforme de la suma)

  $$-8 = 6$$ ¡Absurdo!

  ¿Qué significa esto? ¿Habremos cometido algún error durante el desarrollo? No se cometió ningún error. El absurdo provino de que la ecuación dada no tiene solución en los números reales, es decir, no existe ningún valor de $x$ que satisfaga la ecuación. El conjunto solución de dicha ecuación es vacío.

- Sea la ecuación lineal: $-10x = 5(2x-4x)$

  Resolución:

$$-10x = 5(2x-4x)$$
$$-10x = 5(-2x) \qquad \text{(operando)}$$
$$-10x = -10x$$
$$-10x.\left(-\tfrac{1}{10}\right) = -10x.\left(-\tfrac{1}{10}\right) \qquad \text{(por propiedad uniforme con la suma)}$$
$$x = x$$

Observemos que la ecuación equivalente que obtuvimos se verifica para cualquier valor de $x$. Esto quiere decir que cualquier número real verifica la ecuación inicial, es decir, el conjunto solución de dicha ecuación es infinito.

- Sea la ecuación lineal: $3x-5=8$

  Resolución:

$$3x-5=8$$
$$3x-5+5=8+5 \qquad \text{(por propiedad uniforme de la suma)}$$
$$3x=13$$
$$3x.\tfrac{1}{3}=13.\tfrac{1}{3} \qquad \text{(por propiedad uniforme del producto)}$$
$$x=\tfrac{13}{3}$$

En este caso, existe un único valor de $x$ que verifica la ecuación original. El conjunto solución es unitario.

Conclusión:

Dada una ecuación de primer grado, ésta tiene:

- Ninguna solución
- Una única solución
- Infinitas soluciones

## Resolución de problemas

Para resolver cualquier problema debemos seguir las siguientes pautas. Veamos un ejemplo:

| |
|---|
| *La edad de una madre es el triple que la edad de su hija, y dentro de 14 años sólo tendrá el doble de la que tendrá la hija. ¿Qué edad tiene la hija?* |

- Elección de la incógnita:
  Se debe elegir como incógnita una cantidad desconocida, el resto de las cantidades se relaciona con la incógnita según las condiciones del problema
  - La edad actual de la hija, como la desconocemos, la llamaremos: $x$
  - La edad actual de la madre es el triple: $3x$
  - La edad de la hija dentro de 14 años: $x+14$
  - La edad de la madre dentro de 14 años: $3x+14$

- Planteo de la ecuación:
  Es la parte más importante. Consiste en traducir el enunciado a lenguaje matemático convirtiéndolo en una ecuación.
  Como dentro de 14 años la edad de la madre será el doble que la de la hija, para igualar esas cantidades tenemos que multiplicar la edad de la hija por 2:

$$3x+14=2.(x+14)$$

- Resolución de la ecuación obtenida en el planteo:

$$3x+14=2.(x+14)$$

$$3x+14=2x+28 \qquad \text{(por propiedad distributiva)}$$

$$3x+14-2x=2x+28-2x \qquad \text{(por propiedad uniforme de la suma)}$$

$$x+14=28$$

$$x+14-14=28-14 \qquad \text{(por propiedad uniforme de la suma)}$$

$$x=14$$

  Entonces la hija tiene 14 años y la madre tiene 42 años.

- Comprobación:
  Colocaremos el valor de la solución en el lugar de la $x$:
  Dentro de 14 años la hija tendrá 28 años.
  Dentro de 14 años la madre tendrá 42+14=56 años.
  Se comprueba que el doble de la edad de la hija es igual a la edad de la madre.

Actividad 9:

1. Resolver las siguientes ecuaciones, verificar los resultados:

a. $\frac{3}{2}\mathrm{a}-2{,}5=5+\frac{1}{4}a$

b. $4{,}3+3{,}2\mathrm{b}=5{,}2+7{,}3$

c. $\frac{2}{5}\mathrm{c}-1=\frac{\mathrm{c}-2}{4}$

d. $-\frac{6}{10}\mathrm{d}+\frac{2}{5}=\frac{\mathrm{d}-1}{3}+1$

e. $(8\mathrm{e}-6):2=3\mathrm{e}-(6-2\mathrm{e})+7$

f. $-\frac{2}{5}.\left(\frac{5}{6}f-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.\left(f-\frac{2}{5}\right)$

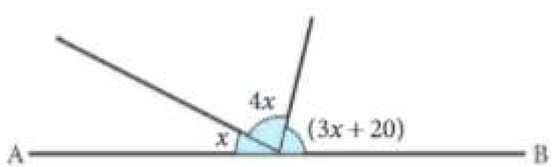
g. $3.(g+9)=\frac{-5+18}{6}$

h. $5.\left(0,\hat{2}h+\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{6}h$

2. Hallar tres números enteros consecutivos cuya suma sea 219.

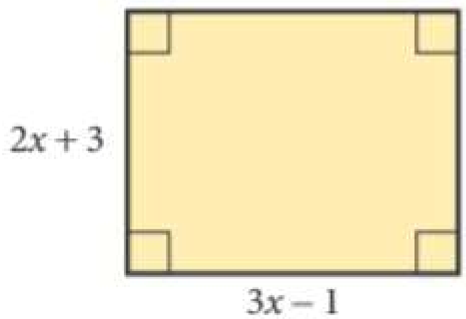
3. Cecilia tiene 16 años y sus dos hermanos pequeños tienen 2 y 3 años. ¿Cuántos años han de pasar para que el doble de la suma de las edades de los hermanos de Cecilia se la misma que tiene ella?

4. ¿Cuánto mide cada ángulo?




5. Vicente gastó 20 euros en un pantalón y una camisa. No sabe el precio que le cobraron cada prenda pero sí sabe que la camisa vale dos quintas partes de lo que vale el pantalón. ¿Cuánto pagó cada prenda?

6. Hallar el área del rectángulo, sabiendo que perímetro es 52 cm




## Ecuaciones Matemáticas en distintas disciplinas:

Actividad 10:

1. Al realizar algunas operaciones es necesario saber cuánta sangre bombea el corazón del paciente. Esta variable depende de la superficie corporal.

Un corazón normal bombea 2,400 litros por metro cuadrado de superficie por minuto. La superficie corporal de una persona se calcula según su peso, con la siguiente fórmula: $S = \frac{4p+7}{p+90}$.

El segundo miembro de la igualdad es una expresión algebraica, al reemplazar p por el peso (en kg) de una persona, el valor numérico que se obtiene es su superficie corporal. (en metros cuadrados)

a. ¿Cuál es la superficie corporal de un adulto que pesa 75 kg?
b. ¿Cuál es la superficie corporal de un bebe que pesa 6 kg?

2. Para calcular la velocidad media de un móvil se establece el cociente entre espacio recorrido y tiempo empleado. $V = \frac{E}{T}$.

a. Calculen la velocidad media de un micro que recorrió 420 Km en 6 horas.
b. ¿Cuál es la velocidad media de un ciclista que recorre 8 Km en 16 minutos?
c. ¿Cuántos km recorrió un auto que viajó a 120 km por hora durante 586 minutos?

d. ¿Cuánto tardó en llegar Ariel a su casa si caminó a una velocidad de 2km por hora y recorrió 13 km?

3. La densidad de la población también se calcula mediante una expresión algebraica H/K, en la que H es el número de habitantes y K, la superficie en kilómetros cuadrados de un lugar determinado.

a. La superficie de nuestro país es 3.761.274 $Km^2$ y según el censo realizado en 2010, somos 40.091.359 habitantes. ¿Cuál es la densidad de la población?
b. En el mismo censo se indicó que en la provincia de Misiones hay 1.097.829 habitantes; y su densidad es 36,8 hab/$Km^2$. Calculen la superficie en $Km^2$ de la provincia.

4. La densidad es una de las propiedades físicas de la materia, y puede observarse en sustancias en sus distintos estados: sólido, líquido y gaseoso. La densidad de un material, bien sea líquido, químico o gaseoso, es la relación entre su masa y volumen. La fórmula para calcular la densidad de un material es $p = m/v$, donde $m$ es la masa y $v$ el volumen que ocupa dicha masa.
a. ¿Cuál es la densidad de un acero si una esfera fabricada de dicho material, tiene un volumen de 313$cm^3$ y una masa de 2500 gramos?
b. ¿Cuál es el volumen de un cubo macizo de 1000$cm^3$ cuya densidad es de 234$g/cm^3$ ¿
c. La densidad de un aceite es de 800$g/l$. ¿Cuál es la masa de aceite, expresada en gramos, que hay en una botella de aceite de un litro y medio?

5. La energía cinética es una forma de energía conocida como la energía de movimiento. La energía cinética de un objeto es aquella que se produce a causa de sus movimientos y depende de la masa y de la velocidad del mismo, la ecuación que los relaciona es:

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde

$Ec$: Energía Cinética $\left[kg.\frac{m^2}{s^2} = Joules\right]$

$m$: Masa $[kg]$

$v = velocidad\ \left[\frac{m}{s}\right]$

a. Un automóvil de 1200kg de masa circula con una velocidad de 40km/h (11.11 m/s) ¿Cuál es su energía cinética?

b. ¿Cuánto aumentará su energía cinética si el mismo auto aumenta su velocidad a 80km/h?

**Sistemas de Ecuaciones lineales con dos incógnitas**

Definición:

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen dos o más incógnitas. En conjunto, estas ecuaciones especifican condiciones que las incógnitas deben satisfacer al mismo tiempo. En este curso trabajaremos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplos de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ 5a = b - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x = 6(y+9) \\ -2(x+2y) = 8 \end{cases}$$

Solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones simultáneas es hallar el conjunto de valores que satisfacen simultáneamente cada una de sus ecuaciones.

**Métodos para resolver un sistema de ecuaciones** (hay varios métodos, en este curso repasaremos dos)

***1º. Eliminación de una incógnita por igualación:***

a) Despejar, en cada ecuación, la incógnita que se requiere eliminar.
b) Igualar las expresiones que representan el valor de la incógnita eliminada.
c) Resolver la ecuación que resulta, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.
d) Sustituir el valor hallado en una de las expresiones que representa el valor de la otra incógnita, y resuélvase.

Ejemplo: Resolver el sistema:
$x + 2y = 22$ (1),
$4x - y = 7$ (2).

Se va a eliminar "x". Para ello se despeja el valor de "x" en (1) y (2) obteniendo:
$x = 22 - 2y$ (3),
$x = (7 + y) / 4$ (4).

Luego se igualan las dos expresiones que representan el valor de "x":
$22 - 2y = (7 + y) / 4$

Se obtiene una ecuación de donde se puede obtener el valor de y:
$88 - 8y = 7 + y$
$-9y = -81$
$y = 9$

Se sustituye en (3) o en (4) el valor hallado para "y":
$x = 22 - 2y$ (3),
$x = 22 - 2(9)$
$x = 4$

por tanto: $x = 4$; $y = 9$.

### *2º. Eliminación por sustitución.*

a) Despejar una incógnita en una de las dos ecuaciones.
b) Sustituir la expresión que representa su valor en la otra ecuación.
c) Resolver la nueva ecuación, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.
d) Sustituir el valor así hallado en la expresión que representa el valor de la otra incógnita, y resolver la ecuación resultante.

Ejemplo: Resolver el sistema:
$3x + y = 22$ (1),
$4x - 3y = -1$ (2).

Se despeja el valor de "x" en (1):

3x = 22 - y
x = (22 - y) / 3 (3).

Luego se sustituye (3) en (2):
4 [(22 - y) / 3] - 3y = -1
4 (22 - y) - 9y = -3
88 - 4y - 9y = -3
-13y = -91
y = 7.

Se Sustituye en (3) el valor hallado para "y".
x = (22 - y) / 3(3).
x = (22 - 7) / 3
x = 5

por tanto: x = 5; y = 7.

Observación: Para resolver un sistema de ecuaciones se puede utilizar cualquier método resolutivo.

Actividad 11:

1. Resolver por el método de Sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones:
   a. $\begin{cases} 3m = 2n - \frac{13}{2} \\ 4m + n = 6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2w + 3x - 13 = 0 \\ x + 5w - 13 = 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 5c - d - 11 = 0 \\ 4d + 3c = -5 \end{cases}$

2. Resolver por el método de Igualación los siguientes sistemas de ecuaciones:
   a. $\begin{cases} a + 4b = 6 \\ 2a + 8b = 10 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x = 4 + z \\ 6x - 5z = 18 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

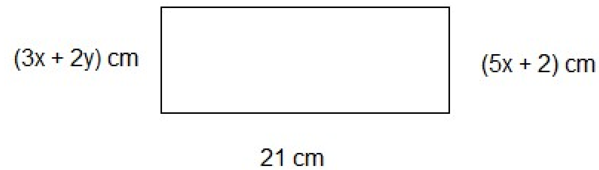
3. El promedio entre dos números es 6,5 y la diferencia entre el doble del primer número y la mitad del segundo es -29.
   a) Plantear el sistema de ecuaciones que te ayudará a encontrar los dos números. No resolver.
   b) Pedro dice que los dos números son 10 y 3, ¿Está en lo cierto? Justificar sin resolver el sistema.
   c) Encontrar la solución del problema usando el método de sustitución.

d) Conociendo los dos números ¿Cuánto da el producto del doble de primer número con el triple del segundo?

4. Resolver los siguientes problemas, planteando el sistema de ecuaciones previamente.

   a. Un motociclista compra 24 litros de nafta y 5 litros de aceite por $ 2140. Otro motociclista compra 18 litros de nafta y 10 litros de aceite por $2480. Encontrar el costo de 1 litro de nafta y 1 litro de aceite.
   b. Hallar dos números cuya suma sea 15 y su diferencia 4.
   c. Un jardinero compra 15 semillas de zanahoria y 20 semillas de lechuga por $1,1. Luego compra 30 semillas de zanahoria y 14 semillas de lechuga por $1,5. ¿Cuánto cuesta cada semilla de lechuga?
   d. Un grupo de 18 personas compuestas por adultos y chicos fueron a cenar y gastaron en total $1314. Si se sabe que la cena de un adulto cuesta $107 y la de un menor $56. ¿Cuántos adultos y cuántos niños fueron a la cena?
   e. Don Luis, amante del buen café, instaló un negocio en el que vende distintos tipos de café en grano que él se encarga de seleccionar personalmente. Para atraer a los clientes, decidió preparar una exclusiva mezcla de granos compuesta por dos variedades de café: Robusta y Arábica. Después de realizar varias pruebas, determinó que la mezcla de mejor sabor resulta ser la que tiene el triple de café Robusta que de Arábica. La envasará en paquetes de 1 kg que quiere vender a $17 cada uno. Si el precio de venta del kilogramo de café Robusta es $16 y el de café Arábica es $10, ¿qué cantidad de café de cada tipo debe colocar don Luis en un kg de mezcla?
   f. Una tienda de ropa de hombres, que está por cerrar, tiene 3 marcas de jeans en stock para vender y desea quedarse sin ninguna prenda. La primera marca se vende a $239, la segunda a $398 y la tercera a $443. Si vende todo el stock que tiene a esos precios recaudaría $123001. Una empleada dijo que la cantidad de pantalones a vender era 395 y que si vendían todos los pantalones de la primera marca obtendrían $55209 que alcanzaría para salvar los costos de todo. ¿Cuántos pantalones de cada marca tiene la tienda para vender?

5. Considerando el rectángulo que se ve en la figura y sabiendo que su perímetro es 76cm,
   a) Calcular el valor de x e y.
   b) ¿Cuál es el área del rectángulo?



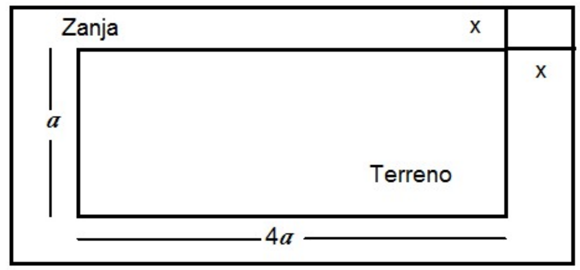

6. Decidir si cada una de las afirmaciones que figuran a continuación es verdadera o falsa. Justificar cada respuesta.
   a) Existe un solo para de valores $(x, y)$ que verifica la ecuación $3x + 2y = 5$
   b) El par de valores $(2, -5)$ verifica la ecuación $3x + y = 1$
   c) El par de valores $(2, -5)$ verifica simultáneamente las siguientes ecuaciones: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$
   d) La ecuación $x.0 + 0.y = 0$ tiene como única solución al par (0,0).

## Ecuaciones Cuadráticas

Situación Problema:

En la antigüedad los egipcios sembraban terrenos en forma rectangular utilizando amplias zanjas o márgenes que llenaban de agua en épocas de sequía.

Un terreno cultivable de forma rectangular, mide $a$ unidades de ancho y su largo es cuatro veces el ancho. El terreno se encuentra rodeado por una zanja cuyo borde exterior también es rectangular y sus lados son paralelos al terreno como se ve en la figura. Generalmente en estos terrenos, el área de la zanja es la mitad del área del terreno. Deducir una ecuación que relacione el ancho de la zanja con el ancho del terreno.



El dibujo no está a escala.

Si el terreno tiene un ancho de 70 metros, ¿cuáles serán las dimensiones de la zanja con este valor?

Resolución:

1. Área del terreno: $4a^2$
2. Área de la zanja: $2.x.4a + 2.a.x + 4x^2 = 8ax + 2ax + 4x^2 = 10ax + 4x^2$

Como el área de la zanja es la mitad que el área del terreno, se tiene que:

$$\frac{1}{2}.4a^2 = 10ax + 4x^2$$

Si el terreno mide 70 metros de ancho, entonces $a = 70$. Luego:

$$\frac{1}{2}.4.70^2 = 10.70.x + 4x^2 \rightarrow 9800 = 700x + 4x^2$$

Como observamos, la ecuación del problema de apertura, no es una ecuación lineal. La variable tiene exponente 2, por lo tanto es una ecuación de segundo grado.

Definamos ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática tiene la forma: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, donde $\boldsymbol{a, b\ y\ c}$ son números reales y $\boldsymbol{a \neq 0}$

La ecuación del problema es una ecuación cuadrática ¿Quiénes serían $a, b\ y\ c$?

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

- $-2x^2 = 8$ pues equivale a $-2x^2 - 8 = 0$ y $a = -2, b = 0\ y\ c = -8$
- $-3x^2 - 1 - 8x = 0$
- $-4x^2 - 9x = 3$

Obs: La ecuación se llama completa, si $a, b\ y\ c$ son diferentes de cero. Si $b\ o\ c$ son ceros, se llama incompleta.

Veamos cómo se resuelven las ecuaciones de segundo grado:

Ecuaciones Incompletas:

- Si $b = 0$ la ecuación cuadrática tiene la forma: $ax^2 + c = 0$ y por propiedades conocidas se puede despejar:

Ejemplos:

1)

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

2) $-2x^2+10=0$

3) $\frac{1}{3}x^2-12=0$

4) $-x^2-9=0$

- Si $c=0$ la ecuación cuadrática tiene la forma: $ax^2+bx=0$.
  Para resolver este tipo de ecuación se puede hacer factor común $x$ y usar la propiedad que dice: $Si\ a.b=0\ entonces\ a=0\ o\ b=0$

  Ejemplos:

  1. $2x^2-3x=0$
     $x(2x-3)=0$ (Factor común x)
     $x=0\ \ o\ 2x-3=0$ (Por propiedad)
     $x=0\ \ o\ x=3/2$

  2. $-3x^2+x=0$
     $x(-3x+1)=0$
     $x=0\ o-3x+1=0$
     $x=0\ o\ x=1/3$

## Ecuaciones completas:

Para resolver ecuaciones del tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ con $\boldsymbol{a \neq 0}$ se usa la fórmula del matemático Bhaskara que asegura que: $\boldsymbol{x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}}$

Ejemplos:

1. $2x^2 + x - 10 = 0$ $\quad S = \left\{\frac{3}{2}, -2\right\}$
2. $x^2 - 2x + 1 =$ $\quad S = \{1\}$
3. $5x^2 - 10x + 15 = 0$ $\quad S = \emptyset$

Resolvamos el problema del terreno…

La ecuación era: $9800 = 700x + 4x^2$

Es decir que: $4x^2 + 700x - 9800 = 0,\ a = 4, b = 700\ y\ c = -9800$

Reemplazando en la fórmula:

$$\frac{-700 \pm \sqrt{700^2 - 4.4.(-9800)}}{2.4} =$$

$$\frac{-700 \pm \sqrt{490000 + 156800}}{8} =$$

$$\frac{-700 \pm \sqrt{646800}}{8} =$$

$$\frac{-700 \pm 804.2387705}{8} =$$

$$\frac{104.2387705}{8} =$$

13.02988463

$$\frac{-1504.23}{8} =$$

-188.02 hay q descartar

**Un poco de Historia:**

**Bhāskara** (1114-1185), también conocido como **Bhaskara Acharia** (*Bhāskara-Ācārya*), fue un matemático y astrónomo indio. Conocido por ser el creador de la fórmula cuadrática o resolvente.

Nació cerca de Biyada Bida —hoy en día el distrito de Bijapur, en el estado de Karnataka (sur de la India)— y se convirtió en jefe del observatorio astronómico de Ujjain, continuando la tradición matemática de Varaja Mijira y Brahma Gupta.

Bhaskara representa el pico del conocimiento matemático y astronómico indio en el siglo XII. Alcanzó un conocimiento de cálculo, astronomía, los sistemas de numeración y la resolución de ecuaciones, que no había sido alcanzado en ninguna parte del mundo durante varios siglos. Sus principales trabajos fueron el *Līlāvatī* (sobre aritmética), *Bījaganita* (*cuenta de raíces*, o sea álgebra) y *Siddhānta Shiromani* (*la joya cimera de las conclusiones*, escrito en 1150), que consta de dos partes: *Golādhyāya* (*capítulo sobre esferas*); *Grahaganita* (*conteo de los astros*).[3]

Actividad 12:

1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas
   a. $x^2 = 6 - x$
   b. $3x + 2 = 2x^2$
   c. $6x.(x+1) = 5 - x$
   d. $(x-3)^2 = 10$
   e. $(2x-1)^2 = (x-1)^2 + 8$
   f. $x = \frac{15}{x} - 22$
   g. $2x^2 = 7x$

2. Plantear y resolver el siguiente problema:

Dos números se diferencian por 3 unidades. La suma de sus inversos es $\frac{7}{10}$. Encontrar ambos números.
(El inverso del número "a" es un número tal que al multiplicarlo por "a" da 1, ejemplo: $\frac{1}{2}$ es el inverso de 2 porque $2.\frac{1}{2} = 1$)