

Curso de Nivelación en Matemática

2

1

2

1

Para las carreras:

- ✓ Licenciatura en Saneamiento Ambiental
- ✓ Tecnicatura en Higiene y Seguridad

Autora: Prof. Dello Russo María Laura

¡Bienvenidos!

Estos apuntes han sido pensados para ayudarte a recuperar y consolidar los conocimientos matemáticos que seguramente adquiriste en el nivel medio, y que son la base para afianzar otros más complejos relacionados con la profesión que elegiste.

Para que podamos alcanzar este propósito es necesario que emprendas esta nueva etapa con responsabilidad y compromiso, sabiendo que nada es posible sin esfuerzo y que nada es tan difícil, incomprensible o inalcanzable como parece, sólo se necesita constancia, paciencia y horas de estudio.

Se sugiere la lectura de este cuadernillo previa a la asistencia al curso, ya que un profesor hará sólo un breve repaso de los conceptos del tema a tratar, se desarrollarán algunos ejemplos, trabajaremos en grupo y consultarán las dudas que hayan tenido en la resolución de los problemas. De ser necesario, el profesor desarrollará algún ejercicio adicional en el pizarrón.

Son objetivos de este curso que te habitúes a los tiempos disponibles en la Universidad para estudiar un tema, que siempre son breves, y que fortalezcas tu capacidad de resolver problemas de la manera más conveniente y en el menor tiempo posible, por lo que esperamos que aproveches los horarios de clase para completar aquellos ejercicios en que hayas tenido inconvenientes y verifiques los resultados que obtuviste, y no para comenzar a resolverlos recién en la clase.

Cada persona tiene una modalidad de estudio, de trabajo. Sin embargo te recomendamos que sigas el orden en que están presentados los temas y que trates de resolver la guía de ejercicios de cada uno de ellos. Es posible que aparezcan dificultades, no te desanimes y volvé a intentarlo. Si aún no llegás a la solución, anotá las dudas y buscá ayuda, un profesor o un compañero pueden brindártela. Seguí adelante, todo es posible, sólo hay que intentarlo.



Números Reales

En distintas partes del mundo y en diferentes épocas, los seres humanos crearon diversos tipos de números, cuyos usos fueron ampliando a medida que se complejizaron las actividades de las personas. Con el devenir de los avances científicos, los matemáticos clasificaron los números y los organizaron formalmente en conjuntos, que aún hoy siguen investigando. Uno de estos conjuntos numéricos es el de los números reales.

Los números reales se conforman con la unión de dos conjuntos: El conjunto de los números racionales (aquellos que pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros) y el conjunto de los números irracionales (aquellos que no pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros y tienen infinitas cifras decimales no periódicas).

Es objetivo de este curso hacer un repaso de estos conjuntos numéricos, sus operaciones y propiedades.

De los Naturales a los Reales (Un breve repaso)

El Conjunto de los Números Naturales [N].

Los números naturales son los números que se utilizan para contar. Se considera que el cero no pertenece a este conjunto, pues empezamos a contar desde el 1. Queda marcado acá que el 1 es el primer elemento de este conjunto, ¿Podrías escribir el último elemento de este conjunto?.....

El conjunto de los Naturales es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Actividad 1: Resuelve los cálculos entre números naturales que aparecen en la tabla e indica cuáles tienen resultado natural (si) y cuáles no (no).

Cálculo	Si o No	Cálculo	Si o No
$3 - 5 + 2 =$		$10 - 4 - 8 =$	
$8 + 1 - 6 =$		$10 + 4 - 8 =$	
$15 + 2 + 30 =$		$4 - 10 - 8 =$	
$9 - 11 - 6 =$		$8 - 10 + 4 =$	
$24 - 36 + 12 =$		$-120 + 34 =$	

Observemos que cuando sumamos dos naturales, obtenemos siempre un número natural, pero no sucede así con la resta, es decir, no siempre que restemos dos naturales obtenemos un natural. Se hace necesario así, definir un nuevo conjunto numérico.

El conjunto de los Números Enteros $[\mathbb{Z}]$:

Cada número entero puede pensarse como la resta de dos naturales; o sea, si a un número natural se le resta otro natural, siempre se obtiene un entero.

Ejemplos:

$$7 - 3 = 4.$$

$$2 - 8 = -6.$$

$$12 - 12 = 0.$$

Luego el conjunto de los enteros está formado por: Los números naturales, sus opuestos y el cero. Es decir:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Actividad 2:

1. Trabajen con la definición:

a. Expresen los números enteros -5 , 3 , 0 , 18 , -25 como diferencia de dos números naturales.

b. ¿Son verdaderas o falsas cada una de estas afirmaciones?

- Todo número natural puede expresarse como la diferencia de dos números enteros.
- Todo número entero puede expresarse como la diferencia de dos números naturales.
- Existen números naturales negativos.
- Todos los números enteros son negativos.
- El cero es un número entero.
- El cero no es un número natural.

2. Resuelve:

a. $-3 \cdot (-4) \cdot 5 =$

f. $\frac{-4.0.500}{100.2} =$

b. $-3.4 \cdot (-5) =$

g. $\frac{6 \cdot (-3) \cdot (-1)}{-2.9} =$

c. $3 \cdot (-4) \cdot 5 =$

h. $\frac{-5 \cdot (-8)}{-4.5} \cdot (-2) =$

d. $-3 \cdot (-4) \cdot (-5) =$

i. $24 - 5 + (-3) \cdot (-10 + 7) =$

e. $-10 : 2 + (-1) \cdot 4 - 3.0 =$

j. $(-24 : 4) + (-100) =$

El conjunto de los números racionales $[\mathbb{Q}]$

Los números racionales aparecen muy temprano en la historia de la humanidad. Fueron creados por los antiguos egipcios y los habitantes de Mesopotamia asiática, hace 5000 años o más, pues obviamente las fracciones eran necesarias para dividir tanto las tierras como los alimentos; aunque no conocían a todos los racionales, sino sólo a los positivos.



En el presente los números racionales son definidos como aquellos que pueden obtenerse de un cociente entre dos números enteros, siendo el divisor distinto de cero.

En símbolos: $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0 \rightarrow a/b \in \mathbb{Q}$

¿Por qué crees que se excluye al cero del denominador?.....

Ejemplos:

$$\frac{-7}{1} = -7; \quad \frac{10}{2} = 5; \quad \frac{-27}{12} = -\frac{9}{4}; \quad \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}; \quad \frac{0}{3} = 0; \quad \frac{1}{-1} = -1$$

Hay dos maneras posibles de escribir un número racional: como fracción y como expresión decimal.

- Recordemos que, por ejemplo, las fracciones $\frac{-27}{12} = -\frac{9}{4}$ y $\frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ son equivalentes porque representan el mismo valor o cantidad, aunque tengan números diferentes en el numerador y denominador.

Podemos encontrar fracciones equivalentes por medio de la simplificación o amplificación, esto es, dividir o multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número (siempre que sea distinto de 0).

- Recordemos también que, para hallar la expresión decimal una fracción debemos dividir el número entre el denominador.

Por tal motivo $\frac{-27}{12} = -\frac{9}{4} = -2,25$ $\frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} = 1,\hat{3}$

Usando la definición podemos justificar si algunos números son racionales o no:

- $\frac{7}{3}$ Es racional pues es la división entre el entero 7 y el entero 3.
- 4 Es racional pues es la división entre el entero 4 y el entero 1.
- $\frac{10}{-5}$ Es racional pues es la división entre el entero 10 y el entero -5.
- 0,3 Es la expresión decimal de un número racional pues es la división entre el entero 3 y el entero 10.
- $0,\hat{5} = 0,5555555 \dots$ Es la expresión decimal de un número racional pues es la división entre el entero 5 y el entero 9.
- $0,1\hat{5} = 0,15555555 \dots$ Es la expresión decimal de un número racional pues es la división entre el entero 14 y el entero 90.

Los últimos tres ejemplos muestran los tres diferentes tipos de expresiones decimales que puede tener un número racional.

- ✓ Expresión decimal finita: 0,3; -0,17; 12,000742.
- ✓ Expresión decimal periódica pura: $0,\hat{5}$; $0,\hat{52}$; $1,\hat{689}$.
- ✓ Expresión decimal periódica mixta: $0,2\hat{5}$; $0,12\hat{52}$; $1,12\hat{689}$.

Para escribir un número decimal como fracción se usan algunas reglas prácticas:

- Si la expresión es decimal finita, entonces se escribe el número entero sin la coma, dividido un 1 y tantos ceros como cantidad de números decimales hay.
- Si la expresión es decimal periódica se puede seguir el siguiente razonamiento:

Ejemplo 1: Supongamos que queremos escribir al decimal $0,5\hat{5}$ como fracción, lo llamaremos x . Entonces, $x = 0,5\hat{5}$.

Si multiplico a x por 10, de forma de correr la coma un lugar me queda que: $10x = 5,5\hat{5}$

Luego restamos $10x - x = 5,5\hat{5} - 0,5\hat{5}$

$$9x = 5.$$

$$x = \frac{5}{9}$$

Podemos verificar que $\frac{5}{9} = 0,5\hat{5}$

Ejemplo 2: Supongamos que queremos escribir al decimal $0,15\hat{5}$ como fracción, lo primero que hacemos es llamarlo x .

Entonces, $x = 0,15\hat{5}$. Si multiplico a x por 10, de forma de correr la coma un lugar me queda que: $10x = 1,5\hat{5}$. Luego multiplico a x por 100, obteniendo que: $100x = 15,5\hat{5}$

Luego restamos $100x - 10x = 15,5\hat{5} - 1,5\hat{5}$

$$90x = 14.$$

$$x = \frac{14}{90}$$

Podemos verificar que $\frac{14}{90} = 0,15\hat{5}$.

Este mecanismo se traduce en la siguiente regla práctica:

(Todas las cifras de la expresión) – (las cifras no periódicas de la expresión)

Tantos 9 como cifras decimales periódicas y tantos 0 como cifras decimales no periódicas

Ejemplos

$$1,1\hat{3} = \frac{113 - 11}{90} = \frac{102}{90} = \frac{17}{15}$$

$$0,17\hat{6}9 = \frac{1769 - 17}{9900} = \frac{1752}{9900} = \frac{438}{2475}$$

$$2,234\hat{1} = \frac{22341 - 22}{9990} = \frac{22319}{9990}$$

Actividad 3: Operaciones con números racionales.

1. Resuelvan en forma decimal los siguientes cálculos.

a. $4,78 + 3,28 =$

b. $2,1 - 0,42 =$

c. $0,2 \cdot (-0,55) =$

2. Resuelvan los siguientes cálculos:

a. $\frac{3}{4} \cdot 2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1,8 =$

b. $6,2 - 3,4 : (-2) + \frac{3}{2} =$

c. $(1 - 0,7) \cdot 0,2 + 1,8 : 2 - 1 =$

d. $\frac{2}{5} : \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} - 1 =$

e. $0,7 : (-2) + 0,1 \cdot (-0,1) + \frac{1}{4} =$

f. $10 : \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + 2 \cdot (-1,4 + 0,2) =$

3. Escriban las expresiones decimales como fracción irreducible:

a. $0,8 =$

b. $3,15 =$

c. $2,52 =$

d. $2,5 =$

e. $0,18 =$

f. $5,24 =$

4. Resuelvan los siguientes ejercicios combinados:

a. $(1,3 - 0,3) : \left(-\frac{1}{6}\right) - 0,2 =$

c. $(1,5 + 0,1) \cdot 0,6 - 1,02 =$

b. $-0,2 \cdot \frac{9}{5} + 1,3 : 0,8 =$

d. $(3,42 \cdot 0,075 + 1,2) \cdot 0,75 =$

POTENCIACIÓN

La potenciación es una forma abreviada de la multiplicación donde todos los factores son iguales.

Si a es un número real y n es un número natural, entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando n veces el factor a , es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ factores}} \quad a^n \text{ es una potencia}$$

Exponente

Base

Ejemplos de potencias:

✓ $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ se lee "cinco al cuadrado"

✓ $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ se lee "menos dos al cubo"

✓ $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ se lee "tres cuartos a la quinta"

Observación: Al resolver potencias de base negativa no debemos olvidar el uso de la regla de los signos.

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$$

$$\underbrace{(+4)}_{(-8)} \cdot (-2)$$

Regla de los
signos

$$(+).(+)= (+)$$

$$(-).(-)= (+)$$

$$(+).(-)= (-)$$

Actividad 4:

1. Escribir en forma de potencia

a. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

d. $10 \cdot 10 \cdot 10 =$

b. $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) =$

e. $n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n =$

c. $(2 + a)(2 + a)(2 + a) =$

f. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

2. Los siguientes cálculos están resueltos de modos diferentes y se obtuvieron dos resultados distintos; esto es un absurdo. Lo que ocurre es que uno está hecho de manera correcta y en el otro no se respetan la separación en términos ni otras propiedades de las operaciones. Indiquen cuáles son los cálculos correctos.

a₁) $8 + 5 \cdot (-3) = 13 \cdot (-3) = -39$

c₁) $5 - (-2)^2 + (-3)^2 = 5 + 4 - 9 = 0$

a₂) $8 + 5 \cdot (-3) = 8 - 15 = -7$

c₂) $5 - (-2)^2 + (-3)^2 = 5 - 4 + 9 = 10$

b₁) $(7 + 4)^2 = 11^2 = 121$

d₁) $16 : 2 + 7 \cdot 3 = 8 + 21 = 29$

b₂) $(7 + 4)^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65$

d₂) $16 : 2 + 7 \cdot 3 = 15 \cdot 3 = 45$

3. Calculen y expresen el resultado como una potencia:

a. $11^3 \cdot 11^6 \cdot 11^0 =$ c. $\left[\frac{9^5 \cdot (-2)^3 \cdot (-2^4)}{9^2} \right]^0 =$ e. $[(-2)^2]^3 =$ g. $(5^0)^3 =$

b. $\frac{7 \cdot 3^5 \cdot 7^4}{7^2 \cdot 3^3} =$ d. $\frac{-5 \cdot 4^0 \cdot (-5)^5 \cdot 4^3}{(-5)^3 \cdot 4} =$ f. $(3^{-2})^2 =$ h. $\frac{3^2(-2)^2}{2^2 \cdot 5} =$

El resultado obtenido en el inciso h, ¿es un número entero?

4. Para festejar la primavera, Pedro propuso un juego. Ese día, les regalaría flores a 5 chicos de la escuela; a la semana siguiente, cada uno de esos chicos debería darles flores a 5 chicos diferentes; y así, cada chico que reciba flores, debería darles flores a otros 5 chicos en la tercera semana.

- Si en la escuela hay 650, ¿Cuántas semanas deberán pasar para que todos reciban flores?
- ¿Cuántos chicos recibirán flores en la segunda semana?
- Escribí el resultado de cada potencia

5. En una fábrica de chocolates, la mitad de la producción del último viernes fueron chocolates blancos. De ellos, la mitad eran rellenos con dulce de leche. Además, la mitad de los chocolates blancos rellenos con dulce de leche estaban cubiertos con coco rallado.

- ¿Qué fracción de la producción de la producción del último viernes representan los chocolates blancos rellenos con dulce de leche y cubiertos con coco rallado?
- ¿Podes expresar la situación mediante una potencia?

6. Pensar y responder

- ¿Qué número elevado al cubo da por resultado 8?



b) ¿Y qué número da por resultado -8?

7. Responder

a) ¿Qué número elevado al cubo da por resultado 16?

b) ¿Y qué número da por resultado -16?

8. Resolver las siguientes potencias

a) $(-5)^4 =$

d) $(-\frac{1}{2})^5 =$

g) $(-\frac{2}{3})^7 =$

b) $(\frac{1}{2})^5 =$

e) $(-8)^3 =$

h) $(\frac{3}{4})^3 =$

c) $(\frac{6}{5})^3 =$

f) $(\frac{12}{7})^2 =$

9. En cada caso, determina para que valores de n se cumple la igualdad

a) $n^3 = -1$

b) $n^2 = 49$

c) $n^3 = -27$

d) $n^6 = -1$

10. En cada caso, completa la regla explica por qué sirve

a) Cuando se eleva un número negativo a un exponente par, el resultado siempre será un número _____ porque _____

b) Cuando se eleva un número negativo a un exponente impar, el resultado siempre será un número _____ porque _____

11. ¿Si a^7 es un número entero cualquiera, es cierto que $(-a)^7 < a^7$ para cualquier valor de a ?

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN.

Si a es un número real, m y n son números **enteros**, se cumplen las siguientes igualdades:

✓ Todo número distinto de cero elevado a la cero, es igual a 1. $a^0 = 1$

Ejemplos:

$2341^0 = 1$

$-0,12^0 = 1$

✓ Todo número elevado a la uno es igual al mismo número. $a^1 = a$

Ejemplos:

$2341^1 = 2341.$

$-3^1 = -3$

✓ Distributiva de la potencia respecto de la multiplicación y la división.

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a : b)^n = a^n : b^n$

Ejemplos

$(8 \cdot 3)^2 = 8^2 \cdot 3^2$

$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2^3}{3^3}$

$= \frac{8}{27}$

✓ Producto de potencias de igual base, se mantiene la base y se suman los exponentes:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Ejemplos:

$$(-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6 \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-5+7+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

- ✓ Cociente de potencias de igual base:
Se mantiene la base y se restan los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Ejemplos:

$$(-3)^2 : (-3)^4 = (-3)^{2-4} = (-3)^{-2} \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^1 : \left(\frac{1}{4}\right)^7 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-7-(-5)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

- ✓ Potencia de otra potencia:
Se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplos

$$(5^3)^2 = 5^6$$

- ✓ Potencia de exponente negativo
Si el exponente es negativo se invierte el número y se eleva al opuesto del exponente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$$

Ejemplos

$$3^{-4} = \left(\frac{3}{1}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \qquad \left(\frac{-1}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{-7}{1}\right)^2 = (-7)^2$$

Actividad 5

1. Determina si las siguientes igualdades son verdaderas. Justifica las falsas.

- | | | |
|---------------------------|--|--|
| a) $4^2 + 3^3 = 7^5$ | e) $6^3 : 3^{-3} = 2^0$ | j) $30^2 : 5^2 = 35^2$ |
| b) $3^3 \cdot 5^2 = 15^5$ | f) $3^4 : 9^2 = 1$ | k) $5^{-2} = -10$ |
| c) $-4^2 = (-4)^2$ | g) $(3^3)^2 = 3^5$ | l) $\left(-\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{(-3)^5}{(-4)^5}$ |
| d) $4^{-2} \cdot 2^4 = 2$ | h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2}$ | |
| | i) $(8 + 9)^2 = 8^2 + 9^2$ | |

2. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tus decisiones. Modifica las afirmaciones falsas para que resulten verdaderas.

a. $n^2 \cdot n^4$ es equivalente a n^8

b. La expresión $b^{10} : b^7$ es equivalente a b^3 para cualquier valor de la variable b .

c. Las expresiones $(a^2)^3$ y a^5 son equivalentes.

3. Decidí si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu decisión.

- a) No hay número entero que cumpla que. $a^{12} < a^{13}$
- b) $(-d)^6$ es un número positivo para cualquier valor entero de d
- c) $(-b)^5$ es un número negativo solo para valores positivos de b
- d) $(-3)^n$ es un número negativo para cualquier valor positivo de n
- e) 5^n es un número negativo para algún valor positivo de n
- f) Si a un número entero negativo se lo multiplica por (-1) , se obtiene un número entero positivo.
- g) Si a un número se lo multiplica por su opuesto, el resultado es negativo.

4. Resolver aplicando propiedades cuando sea posible.

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$
- b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$
- c) $0,1^2 =$
- d) $(-0,2)^3 =$
- e) $(0,3)^4 =$
- f) $(-0,3)^2 =$
- g) $(0, \hat{2})^3 =$
- h) $(-1, \hat{2})^2 =$
- i) $((-20)^4)^3 : (-20)^{10} \cdot (-20)^0 =$
- j) $2^8 5^8 : 10^6 =$
- k) $3^{15} : (3^7)^2 =$
- l) $0,25^3 : [(0,5)^2]^3 =$
- m) $(3^2)^4 : (9^5 : 3^5) =$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica es una forma abreviada para escribir números. Es muy usada en ciencias, como la Astronomía o la Microbiología, en las cuáles se trabaja con números de muchas cifras, ya sea porque se trata de números muy grandes o muy pequeños.

Un número está expresado en notación científica cuando está escrito como el producto entre un número cuyo módulo es mayor o igual que 1 y menor que 10, por una potencia de base 10.

Cómo escribir en notación científica un número cuyo módulo es	
... mayor que 1:	... menor que 1
<ul style="list-style-type: none"> • “Se corre” la coma decimal hacia la izquierda, tantos lugares como sea necesario, para obtener un número mayor o igual que 1 y menor que 10; • Se escribe dicho número multiplicado por una potencia de base 10, cuyo exponente es positivo e igual a la cantidad de lugares o cifras que “se corrió” la coma decimal. 	<ul style="list-style-type: none"> • “Se corre” la coma decimal hacia la derecha, tantos lugares como sea necesario para obtener un número mayor o igual que 1 y menor que 10; • Se escribe dicho número multiplicado por una potencia de base 10, cuyo exponente es negativo y su módulo es igual a la cantidad de lugares o cifras que “se corrió” la coma decimal.

Ejemplos

<p>La distancia entre la Tierra y el sol es de aproximadamente de 150.000.000 km:</p> <p>Observen:</p> $150.000.000 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ <p>8 lugares hacia la izquierda</p>	<p>El peso de una molécula de hidrógeno es 0,0000000000000000000000348 gramos:</p> <p>Observen:</p> $0,0000000000000000000000348 \text{ g} = 3,48 \cdot 10^{-22}$ <p>22 lugares hacia derecha</p>
---	---

Actividad 6.

1. Reescribir cada oración empleando la notación científica.
 - a) En un mililitro de sangre hay cuatro y cinco millones de hematíes o glóbulos rojos; de 6 mil quinientos a 7 mil leucocitos o glóbulos blancos y de 200 mil a 300 mil plaquetas o trombocitos.
 - b) El largo de un microorganismo es de 0,00000034 milímetros.
 - c) La luz viaja a una velocidad de 300.000 km/s.

$$\sqrt{3} = 1,7320508 \dots \dots$$

$$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots \dots \dots$$

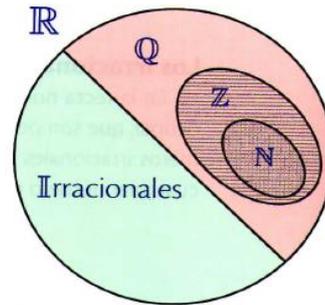
$$\sqrt[3]{10} = 2,15443469 \dots \dots \dots$$

- El número $\pi = 3,141592654 \dots \dots \dots$

Con este nuevo conjunto numérico, se terminan de formar los números reales.

Números Reales (\mathbb{R}) Es el conjunto de números por los números racionales y los números irracionales.

formados



Actividad 7:

1. Unir según corresponda en cada caso.

a) $\sqrt{5}$	e) $\frac{2}{3}$	i) $1 + \sqrt{6}$	m) $\sqrt{2,89}$	Racional
b) $\sqrt[3]{8}$	f) $\sqrt{8} - \sqrt{8}$	j) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$	n) $\frac{\sqrt{10}}{2}$	Irracional
c) $3\sqrt{7}$	g) $\sqrt{0,009}$	k) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$		
d) 4π	h) $0,1\overline{4}$	l) $4,5555\dots$	o) $\sqrt{20} : \sqrt{5}$	

2. Ubiquen 3 números irracionales entre estos números:

- a. 15 y 15,1. b. 0,5 y 0,51. c. -6,4 y -6,3. d. $\sqrt{2}$ y $\frac{3}{2}$.

3. ¿Las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas? ¿Por qué?

- $\sqrt{169}$ es un número racional.
- $\sqrt[3]{125}$ es un número irracional.
- Los números cuya expresión decimal es periódica, son irracionales.
- Todo número se puede escribir como el cociente de dos números enteros.
- Entre dos números irracionales existe algún número irracional.

4. Respondan y justifiquen:

- ¿Es posible indicar cuántos números racionales existen entre $\frac{1}{2}$ y 1?
- ¿Es posible indicar cuántos números racionales existen entre -1 y $-\frac{1}{2}$?
- ¿Cuántos números irracionales se pueden encontrar entre $\frac{1}{2}$ y 1?



- d. ¿Un número irracional puede ser racional?
e. ¿Un número racional puede ser irracional?

5. Considerando los conjuntos de números que ya conocemos, existen entre ellos las

siguientes relaciones: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; esto significa que los naturales están contenidos en los enteros, éstos en los racionales y el conjunto de los racionales está incluido en los reales.

Completar la siguiente tabla, con si o no, según corresponda:

Número	7	$\sqrt{10}$	-2,08	1,121222.....	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$14,\hat{3}$	0	π	$\sqrt{9}$
¿Natural?									
¿Entero?									
¿Racional?									
¿Irrracional?									

6. Indiquen cuál de estas afirmaciones es verdadera y cuál es falsa. Justifiquen.

- Todo número real es racional.
- Algunos números naturales son enteros.
- Todo número entero es un número racional.
- Todos los números reales son números irracionales.
- Ningún número real es un número irracional.

ECUACIONES



Dos mujeres charlando:

“La cuarta parte de mi vida la pasé en una casa de campo, la mitad en un pueblo y los últimos 10 años viviendo en esta ciudad. ¿Cuántos años crees que tengo?”

La otra mujer, tras pensar, responde:

“Cuarenta años”

¿Cómo pudo saberlo?

Como hemos visto, todo problema matemático puede expresarse en lenguaje ordinario o en lenguaje matemático.

Para resolver el problema, la mujer utilizó una igualdad en la que un valor era desconocido. Muchos problemas se resuelven de manera similar, lo que originó el estudio de las ecuaciones.

¿Qué son las ecuaciones?

Las ecuaciones son igualdades en las que aparecen números y letras (denominadas incógnitas) relacionados mediante operaciones matemáticas.

Por ejemplo: $y + 2x = 5$; $a + b = 8$; $2^e + 8 = 3$

En particular, cuando el valor desconocido es uno solo, a dicha ecuación la llamamos ecuación con una incógnita. Algunos ejemplos son:

a) $3x + 4 = 5x - 8$

b) $2x^2 + 20 = 24x - 20$

c) $\log x = 3 - \log(x + 2)$

Solución de una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar los valores de la incógnita tales que, al ser sustituidos en la ecuación y realizar las operaciones indicadas, hagan que la igualdad sea cierta. Por ejemplo, dada la ecuación $3x - 1 = 6x - 7$, si sustituimos x por el valor 2 en dicha ecuación, tenemos:

$$3 \cdot 2 - 1 = 6 \cdot 2 - 7$$

$$6 - 1 = 12 - 7$$

y la ecuación se ha transformado en una identidad, por lo tanto, 2 es solución de la ecuación.

En cambio si sustituimos x por el valor 3 en la misma ecuación:

$$3 \cdot 3 - 1 = 6 \cdot 3 - 7$$

$$9 - 1 = 18 - 7$$

$$8 = 11$$

llegamos a una igualdad que no es cierta. Por lo tanto, 3 no es solución de la ecuación.

El conjunto solución de una ecuación determinada puede:

- Tener un solo elemento: por ej. $2x = 6$. La única solución de esta ecuación es $x = 3$.
- Tener un número finito de elementos: por ej. $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$ tiene como soluciones solamente a $\frac{1}{2}$, -1 y 0 .
- No tener elementos: por ej. $x^2 = -4$. En este caso decimos que el conjunto solución es vacío.
- Tener infinitos elementos: por ej. $2x - x = x$, puesto que todo número real es solución de dicha ecuación.

Cuando dos ecuaciones tienen el mismo conjunto solución, decimos que dichas ecuaciones son equivalentes. Por ejemplo, las ecuaciones $4x + 6 = x + 9$ y $x - 2 = -1$ tienen ambas como conjunto solución al 1.

¿Cómo podríamos obtener ecuaciones equivalentes a una dada? Para esto, nos valemos de algunas propiedades básicas de las igualdades:

Si a, b, c y d son cuatro números reales cualesquiera, entonces valen las propiedades siguientes:

- 1) **Reflexividad:** $a = a$, es decir, todo número es igual a sí mismo.
- 2) **Simetría:** $a = b \Rightarrow b = a$, es decir, dados dos números a y b , si el primero es igual al segundo, entonces el segundo también es igual al primero.
- 3) **Transitividad:** $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$, es decir, si un número a es igual a otro b , y éste último es igual a un tercer número c , entonces el primero es igual al tercero.
- 4) **Uniformidad con la suma:** $a = b \Rightarrow a + c = b + c$, es decir, si se suma el mismo número a ambos miembros de una igualdad, se obtiene otra igualdad.
- 5) **Uniformidad con el producto:** $a = b \Rightarrow ac = bc$, es decir, si se multiplican ambos miembros de una igualdad por el mismo número, se obtiene otra igualdad.

$$3x + 8 = 9$$

$$3x + 8 + (-8) = 9 + (-8)$$

(por la uniformidad con la suma)

$$3x = 1$$

$$3x \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} \quad (\text{por la uniformidad con el producto})$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Es importante verificar que el valor obtenido satisface la ecuación porque un error en los cálculos puede conducirnos a una solución incorrecta.

Grado de una ecuación

El grado de una ecuación es el mayor de todos los exponentes a los que está elevada la incógnita.

Se dice que son de primer grado cuando el exponente de la incógnita es como mucho 1.

Resolución de ecuaciones de primer grado con una sólo incógnita

En la resolución de ecuaciones es común escuchar comentarios como “lo que está restando pasa sumando” o “lo que está multiplicando pasa dividiendo”. En realidad, lo que se está haciendo es aplicar las propiedades vistas. En este curso vamos a trabajar usando esas propiedades y justificando todos los pasos realizados. Veamos ciertos casos particulares:

- Sea la ecuación lineal: $2x - 8 = 2(3 + x)$

Resolución:

$$2x - 8 = 2(3 + x)$$

$$2x - 8 = 6 + 2x \quad (\text{por propiedad distributiva})$$

$$2x - 8 - 2x = 6 + 2x - 2x \quad (\text{por propiedad uniforme de la suma})$$

$$-8 = 6 \quad \text{¡Absurdo!}$$

¿Qué significa esto? ¿Habremos cometido algún error durante el desarrollo? No se cometió ningún error. El absurdo provino de que la ecuación dada no tiene solución en los números reales, es decir, no existe ningún valor de x que satisfaga la ecuación. El conjunto solución de dicha ecuación es vacío.

- Sea la ecuación lineal: $-10x = 5(2x - 4x)$

Resolución:

$$-10x = 5(2x - 4x)$$

$$-10x = 5(-2x) \quad (\text{operando})$$

$$-10x = -10x$$

$$-10x \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) = -10x \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \quad (\text{por propiedad uniforme con la suma})$$

$$x = x$$

Observemos que la ecuación equivalente que obtuvimos se verifica para cualquier valor de x . Esto quiere decir que cualquier número real verifica la ecuación inicial, es decir, el conjunto solución de dicha ecuación es infinito.

- Sea la ecuación lineal: 3

Resolución:

$$3x - 5 = 8$$

$$3x - 5 + 5 = 8 + 5$$

(por propiedad uniforme de la suma)

$$3x = 13$$

$$3x \cdot \frac{1}{3} = 13 \cdot \frac{1}{3}$$

(por propiedad uniforme del producto)

$$x = \frac{13}{3}$$

En este caso, existe un único valor de x que verifica la ecuación original. El conjunto solución es unitario.

Conclusión:

Dada una ecuación de primer grado, ésta tiene:

- Ninguna solución
- Una única solución
- Infinitas soluciones

Resolución de problemas

Para resolver cualquier problema debemos seguir las siguientes pautas. Veamos un ejemplo:

La edad de una madre es el triple que la edad de su hija, y dentro de 14 años sólo tendrá el doble de la que tendrá la hija. ¿Qué edad tiene la hija?

- Elección de la incógnita:

Se debe elegir como incógnita una cantidad desconocida, el resto de las cantidades se relaciona con la incógnita según las condiciones del problema

- La edad actual de la hija, como la desconocemos, la llamaremos: x
- La edad actual de la madre es el triple: $3x$
- La edad de la hija dentro de 14 años: $x+14$
- La edad de la madre dentro de 14 años: $3x+14$

- Planteo de la ecuación:

Es la parte más importante. Consiste en traducir el enunciado a lenguaje matemático convirtiéndolo en una ecuación.

Como dentro de 14 años la edad de la madre será el doble que la de la hija, para igualar esas cantidades tenemos que multiplicar la edad de la hija por 2:

$$3x + 14 = 2 \cdot (x + 14)$$

- Resolución de la ecuación obtenida en el planteo:

$$3x + 14 = 2 \cdot (x + 14)$$

$$3x + 14 = 2x + 28 \quad (\text{por propiedad distributiva})$$

$$3x + 14 - 2x = 2x + 28 - 2x \quad (\text{por propiedad uniforme de la suma})$$

$$x + 14 = 28$$

$$x + 14 - 14 = 28 - 14 \quad (\text{por propiedad uniforme de la suma})$$

$$x = 14$$

Entonces la hija tiene 14 años y la madre tiene 42 años.

- Comprobación:

Colocaremos el valor de la solución en el lugar de la x :

Dentro de 14 años la hija tendrá 28 años.

Dentro de 14 años la madre tendrá $42 + 14 = 56$ años.

Se comprueba que el doble de la edad de la hija es igual a la edad de la madre.

Actividad 8:

1. Resolver las siguientes ecuaciones, verificar los resultados:

a. $\frac{3}{2}a - 2,5 = 5 + \frac{1}{4}a$

b. $4,3 + 3,2b = 5,2 + 7,3$

c. $\frac{2}{5}c - 1 = \frac{c-2}{4}$

d. $-\frac{6}{10}d + \frac{2}{5} = \frac{d-1}{3} + 1$

e. $(8e - 6):2 = 3e - (6 - 2e) + 7$

f. $-\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}f - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(f - \frac{2}{5}\right)$

g. $3 \cdot (g + 9) = \frac{-5 + 18g}{6}$

h. $5 \cdot \left(0,2h + \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{6}h$

2. a. En un barco que llegó desde España al puerto de Buenos Aires, a fines del siglo XIX, venían 480 personas dispuestas a trabajar e instalarse en estas tierras. La mitad era de Galicia, un tercio de Andalucía y el resto de diferentes regiones de la península ibérica. ¿Qué número de personas tenía cada uno de estos tres grupos?

b. Los oficios que conocían eran variados. Si en un grupo de inmigrantes había 23 carpinteros, que constituían $\frac{1}{13}$ del total, ¿Cuál era el total de integrantes de ese grupo?

c. En otro grupo había un quinto de zapateros y tres décimos de electricistas. Si entre zapateros y electricistas eran 95 personas, ¿Cuál era el número total de inmigrantes de ese grupo?

d. La mayor parte de los argentinos tiene padres, abuelos o bisabuelos que vinieron de otros países. El abuelo Manuel tiene hoy 84 años, nació en España y vino a estas tierras a los 16 años. ¿En qué año nació? ¿En qué año llegó a Argentina? ¿Qué fracción de su vida transcurrió en España y qué fracción en nuestro país?

3. a. Una zapatería para damas compra una partida de 144 pares de zapatos. La mitad son negros, la tercera parte, marrones, y el resto, de colores variados. ¿Cuántos pares hay de cada color? ¿Qué fracción del total representan los de colores variados?

b. Ramón recibió \$135000, que son las tres quintas partes de una herencia, ¿Cuál era el monto total de la herencia? Si su primo Javier sólo recibió \$22500, ¿Qué fracción de la herencia le correspondía?

c. Andrés distribuye su sueldo del siguiente modo: $\frac{1}{3}$ lo gasta en alquiler; $\frac{1}{6}$, en expensas y servicios; $\frac{1}{10}$, en la cuota del pago de tarjetas de crédito y le quedan \$45800 ¿Cuál es su sueldo?

d. Ana y Ariel compraron una enciclopedia. Ana aportó las dos terceras partes del precio y Ariel puso \$1494,5; así llegaron al precio total. ¿Cuánto costó la enciclopedia?

e. Matías, que vive en Buenos Aires, decidió ir en auto a visitar a su primo, que vive en la ciudad de Córdoba. Salió temprano y antes del mediodía ya había recorrido un tercio del camino, se detuvo a almorzar y luego avanzó tres quintos más, pero aún le faltaban recorrer 60 km, ¿Cuántos kilómetros tiene el camino?

4. Hallar tres números enteros consecutivos cuya suma sea 219.

5. Cecilia tiene 16 años y sus dos hermanos pequeños tienen 2 y 3 años. ¿Cuántos años han de pasar para que el doble de la suma de las edades de los hermanos de Cecilia se la misma que tiene ella?

6. Vicente gastó 20 euros en un pantalón y una camisa. No sabe el precio que le cobraron cada prenda pero sí sabe que la camisa vale dos quintas partes de lo que vale el pantalón. ¿Cuánto pagó cada prenda?

7. Una tienda vende en dos días la tercera parte de sus productos. Al día siguiente recibe de sus proveedores la mitad de la cantidad de los productos vendidos, que son 15 unidades. ¿Cuántas unidades vendió los dos primeros días? ¿Cuántas unidades hay en la tienda después de abastecerla?

8. En una casa, el depósito de agua se encuentra a $\frac{2}{7}$ de su capacidad. Se duchan tres personas. El primero consume una quinta parte de la cantidad del depósito; el segundo, una tercera parte de la cantidad que queda; y el tercero, tres cuartas partes de

lo que consumió el primero. ¿Cuál es la capacidad del depósito y la cantidad de agua que consumen los dos primeros si sabemos que el tercero consume 10 litros de agua al ducharse?

Ecuaciones Matemáticas en distintas disciplinas:

Actividad 9:

1. Al realizar algunas operaciones es necesario saber cuánta sangre bombea el corazón del paciente. Esta variable depende de la superficie corporal.

Un corazón normal bombea 2,400 litros por metro cuadrado de superficie por minuto. La superficie corporal de una persona se calcula según su peso, con la siguiente

fórmula:
$$S = \frac{4p + 7}{p + 90}$$

El segundo miembro de la igualdad es una expresión algebraica, al reemplazar p por el peso (en kg) de una persona, el valor numérico que se obtiene es su superficie corporal. (en metros cuadrados)

- ¿Cuál es la superficie corporal de un adulto que pesa 75 kg?
- ¿Cuál es la superficie corporal de un bebe que pesa 6 kg?

2. Para calcular la velocidad media de un móvil se establece el cociente entre

espacio recorrido y tiempo empleado.
$$V = \frac{E}{T}$$

- Calculen la velocidad media de un micro que recorrió 420 Km en 6 horas.
- ¿Cuál es la velocidad media de un ciclista que recorre 8 Km en 16 minutos?
- ¿Cuántos km recorrió un auto que viajó a 120 km por hora durante 586 minutos?
- ¿Cuánto tardó en llegar Ariel a su casa si caminó a una velocidad de 2km por hora y recorrió 13 km?

3. La densidad de la población también se calcula mediante una expresión algebraica H/K , en la que H es el número de habitantes y K, la superficie en kilómetros cuadrados de un lugar determinado.

- La superficie de nuestro país es $3.761.274 \text{ Km}^2$ y según el censo realizado en 2010, somos 40.091.359 habitantes. ¿Cuál es la densidad de la población?
- En el mismo censo se indicó que en la provincia de Misiones hay 1.097.829 habitantes; y su densidad es $36,8 \text{ hab/Km}^2$. Calculen la superficie en Km^2 de la provincia.

4. La densidad es una de las propiedades físicas de la materia, y puede observarse en sustancias en sus distintos estados: sólido, líquido y gaseoso. La densidad de un material, bien sea líquido, químico o gaseoso, es la relación entre su masa y volumen. La fórmula para calcular la densidad de un material es $\rho = m/v$, donde m es la masa y v el volumen que ocupa dicha masa.

- ¿Cuál es la densidad de un acero si una esfera fabricada de dicho material, tiene un volumen de 313cm^3 y una masa de 2500 gramos?
- ¿Cuál es el volumen de un cubo macizo de 1000cm^3 cuya densidad es de $234\text{g}/\text{cm}^3$ ¿
- La densidad de un aceite es de $800\text{g}/\text{l}$. ¿Cuál es la masa de aceite, expresada en gramos, que hay en una botella de aceite de un litro y medio?

5. La energía cinética es una forma de energía conocida como la energía de movimiento. La energía cinética de un objeto es aquella que se produce a causa de sus movimientos y depende de la masa y de la velocidad del mismo, la ecuación que los relaciona es:

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde

Ec : Energía Cinética $\left[\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Joules} \right]$

m : Masa $[\text{kg}]$

$v = \text{velocidad} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

- Un automóvil de 1200kg de masa circula con una velocidad de 40km/h (11.11 m/s) ¿Cuál es su energía cinética?
- ¿Cuánto aumentará su energía cinética si el mismo auto aumenta su velocidad a 80km/h?